Tema 5: Teorema de Radon-Nikodỳm

27 de abril, 3 y 6 de mayo de 2010

Integral indefinida de una función medible positiva

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible

Integral indefinida de f:

$$\varphi : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f \, d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

φ es una medida y, para $g : \Omega \to [0, \infty]$ medible,

$$\int_\Omega g \, d\varphi = \int_\Omega g \, f \, d\lambda$$

Escribimos:

$$d\varphi = f \, d\lambda$$

Relación entre λ y μ:

$$E \in \mathcal{A}, \; \lambda(E) = 0 \implies \varphi(E) = 0$$

Decimos que φ es absolutamente continua con respecto a λ: $\varphi \ll \lambda$

La pregunta natural

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ otra medida

¿Existe una función medible $f : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $d\mu = f\, d\lambda$?

Condición obviamente necesaria: $\mu \ll \lambda$ ¿Es suficiente?

En general NO: $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ conjuntos medibles Lebesgue, λ número de elementos, μ medida de Lebesgue

Teorema de Radon-Nikodỳm para medidas positivas

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ un espacio de medida σ-finita y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida absolutamente continua con respecto a λ:

$$E \in \mathcal{A},\ \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

Entonces existe una función medible $f : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $d\mu = f\, d\lambda$:

$$\mu(E) = \int_E f\, d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Integral indefinida de una función integrable

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f \in L_1(\lambda)$. Integral indefinida de f:

$$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}, \quad \mu(E) = \int_E f \, d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

μ es σ-aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \ (n \neq m) \quad \Longrightarrow \quad \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

μ es combinación lineal de medidas (positivas):

$$\mu(E) = \int_E (\operatorname{Re} f)^+ \, d\lambda - \int_E (\operatorname{Re} f)^- \, d\lambda + i \int_E (\operatorname{Im} f)^+ \, d\lambda - i \int_E (\operatorname{Im} f)^- \, d\lambda$$

Medidas reales o complejas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible

Medida real o compleja: aplicación $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ que es σ-aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ A_n \cap A_m = \emptyset \ (n \neq m) \ \ \Longrightarrow \ \ \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Observaciones: $\mu(\emptyset) = 0$ y, más importante, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| < \infty$

Notación: $M(\mathcal{A})$ medidas reales o complejas definidas en $\mathcal{A}$, espacio vectorial.
$M^+(\mathcal{A})$ medidas positivas y finitas

$$M^+(\mathcal{A}) \subseteq M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \subseteq M(\mathcal{A}, \mathbb{C}) = M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \oplus i M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$$

$M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ espacio vectorial ordenado: $\mu_1 \leqslant \mu_2 \ \Leftrightarrow \ \mu_2 - \mu_1 \in M^+(\mathcal{A})$

¿Es $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ un retículo vectorial?
¿Podemos definir coherentemente el valor absoluto de una medida real o incluso el módulo de una medida compleja?

Variación de una medida compleja

$\mu \in M(\mathcal{A})$ medida real o compleja. Para $E \in \mathcal{A}$ escribimos:

$$\Pi(E) = \left\{ \{A_n\} : E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \,,\ A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N},\ A_n \cap A_m = \emptyset\ (n \neq m) \right\}$$

Entonces:

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| : \{A_n\} \in \Pi(E) \right\} \quad (E \in \mathcal{A})$$

$|\mu| : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ es la variación de la medida μ

Teorema (la propiedad clave de la variación)

La variación de una medida real o compleja es una medida positiva y finita:

$$\mu \in M(\mathcal{A}) \implies |\mu| \in M^{+}(\mathcal{A})$$

Propiedades de retículo

- Si $\mu \in M(\mathcal{A})$ y $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ medida positiva,

$$|\mu(E)| \leqslant \nu(E) \;\; \forall E \in \mathcal{A} \implies |\mu|(E) \leqslant \nu(E) \; \forall E \in \mathcal{A}$$

- Equivalentemente, caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $|\mu| = \sup\{\operatorname{Re}(e^{i\theta}\mu) : \theta \in \mathbb{R}\}$
- Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $|\mu| = \sup\{\mu, -\mu\}$
- $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ es un retículo vectorial:

$$\mu \vee \nu = \frac{1}{2}(\mu + \nu + |\mu - \nu|); \;\; \mu \wedge \nu = \frac{1}{2}(\mu + \nu - |\mu - \nu|)$$

- Descomposición de Jordan de una medida real:

$$\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \implies \begin{cases} \mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) = \mu \vee 0 \\ \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu) = -(\mu \wedge 0) \end{cases}$$

Propiedades:

$$\mu^+, \mu^- \in M^+(\mathcal{A}), \quad \mu = \mu^+ - \mu^-, \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 \;\text{ con }\; \mu_1, \mu_2 \in M^+(\mathcal{A}) \implies \mu^+ \leqslant \mu_1, \; \mu^- \leqslant \mu_2$$

Norma de una medida

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible. Definiendo

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega)\,, \qquad \big(\mu \in M(\mathcal{A})\big)$$

se obtiene una norma en $M(\mathcal{A})$, "Variación total"

Otra norma natural:

$$\|\mu\|_\infty = \sup\{|\mu(E)| : E \in \mathcal{A}\} \qquad \big(\mu \in M(\mathcal{A})\big)$$

Ambas normas son equivalentes

$$\|\mu\|_\infty \leqslant \|\mu\| \leqslant 4\,\|\mu\|_\infty \qquad \big(\lambda \in M(\mathcal{A})\big)$$

Y ambas son completas. $M(\mathcal{A})$ espacio de Banach con la norma de la variación total

Continuidad absoluta

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $\mu \in M(\mathcal{A})$. $\mu \ll \lambda$ cuando:

$$E \in \mathcal{A}, \quad \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

Equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; : \; E \in \mathcal{A}, \; \lambda(E) < \delta \implies |\mu(E)| < \varepsilon$$

Observación: $\mu \ll \lambda \iff |\mu| \ll \lambda$

Teorema de Radon-Nikodỳm

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ un espacio de medida σ-finita y $\mu \in M(\mathcal{A})$ una medida absolutamente continua con respecto a λ:

$$E \in \mathcal{A}, \; \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

Entonces existe una única $f \in L_1(\lambda)$ tal que μ es la integral indefinida de f, es decir,

$$\mu(E) = \int_E f \, d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Unicidad

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida σ-finita, $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$,

$$R(f) = \left\{ \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f \, d\lambda : E \in \mathcal{A}, \ 0 < \lambda(E) < \infty \right\}$$

Entonces $\lambda\big(\{x \in \Omega : f(x) \notin \overline{R(f)}\}\big) = 0 \qquad \big(f(x) \in \overline{R(f)}$ p.c.t. $x \in \Omega\big)$

Descomposición polar

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $\mu \in M(\mathcal{A})$. Existe $h : \Omega \to \mathbb{K}$ medible, tal que

$$|h(x)| = 1 \ \ \forall x \in \Omega \qquad \text{y} \qquad \mu(E) = \int_E h \, d|\mu| \ \ \forall E \in \mathcal{A}$$

h está determinada $|\mu|$-c.p.d. "Descomposición polar"

Integral asociada a una medida real o compleja:

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f \, h \, d|\mu| \quad \big(f \in L_1(|\mu|), E \in \mathcal{A}\big)$$

Simbólicamente: $d\mu = h \, d|\mu|$

Descomposición de Hahn de una medida real

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, descomposición polar $d\mu = h\, d|\mu|$

$h(x) \in \{-1, 1\}\ \forall x \in \Omega$, (signo de una medida real). Definimos:

$$A^+ = \{x \in \Omega : h(x) = 1\}; \quad A^- = \{x \in \Omega : h(x) = -1\}$$

El par (A^+, A^-) es una descomposición de Hahn de la medida real μ

- $\Omega = A^+ \cup A^-$, $A^+ \cap A^- = \emptyset$,

$$E \in \mathcal{A} \quad \begin{cases} E \subseteq A^+ \ \Rightarrow \ \mu(E) \geqslant 0 \\ E \subseteq A^- \ \Rightarrow \ \mu(E) \leqslant 0 \end{cases}$$

- $\mu(E) = |\mu|(E \cap A^+) - |\mu|(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$
- $|\mu|(E) = \mu(E \cap A^+) - \mu(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$
- $\mu^+(E) = \mu(E \cap A^+)$, $\mu^-(E) = -\mu(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$
- Unicidad: si (B^+, B^-) es otra descomposición de Hahn,

$$|\mu|\big[(A^+ \setminus B^+) \cup (B^+ \setminus A^+)\big] = |\mu|\big[(A^- \setminus B^-) \cup (B^- \setminus A^-)\big] = 0$$

Revisión de la integral indefinida

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f \in L_1(\lambda)$, $\mu(E) = \int_E f\, d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$

- $\mu \in M(\mathcal{A}), \quad \mu \ll \lambda$
- $|\mu|(E) = \int_E |f|\, d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{A}$
- $\|\mu\| = |\mu|(\Omega) = \|f\|_1$
- Descomposición polar: tomando $h : \Omega \to \mathbb{K}$ medible, tal que $|h(x)| = 1$ y $f(x) = h(x)|f(x)|$ para casi todo $x \in \Omega$, se tiene $d\mu = h\, d|\mu|$
- Integral asociada a μ:

$$\int_E g\, d\mu = \int_E g\, f\, d\lambda \quad \big(g \in L_1(|\mu|), E \in \mathcal{A}\big)$$

  De hecho, $L_1(|\mu|) = \{g \in L_0(\mu) : gf \in L_1(\lambda)\}$
- Si $f \in L_1(\mu, \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} \text{Jordan: } \mu^+(E) = \int_E f^+\, d\lambda, \quad \mu^-(E) = \int_E f^-\, d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{A} \\ \text{Hahn: } \quad A^+ = \{x \in \Omega : f(x) \geqslant 0\}, \quad A^- = \{x \in \Omega : f(x) < 0\} \end{cases}$$

Ortogonalidad de medidas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, μ medida en $\mathcal{A}$ (positiva, real o compleja), $A \in \mathcal{A}$:

$$\mu \ \text{concentrada en} \ A \iff \mu(E) = \mu(E \cap A) \ \ \forall E \in \mathcal{A}$$

Equivalentemente:

$$\begin{cases} \mu(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si } \mu \geqslant 0 \\ |\mu|(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si } \mu \in M(\mathcal{A}) \end{cases}$$

μ_1 y μ_2 son ortogonales (o mutuamente singulares) cuando están concentradas en conjuntos disjuntos:

$$\mu_1 \perp \mu_2 \ \Leftrightarrow \ \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A} : A_1 \cap A_2 = \emptyset, \ \mu_k \text{ concentrada en } A_k, k = 1, 2$$

Descomposición de Lebesgue

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ un espacio de medida σ-finita y $\mu \in M(\mathcal{A})$. Entonces μ admite una única descomposición de la forma $\mu = \mu_a + \mu_s$ donde $\mu_a \ll \lambda$ y $\mu_s \perp \lambda$

Resumen

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, $M(\mathcal{A})$ el espacio vectorial de las medidas reales o complejas en $\mathcal{A}$ y $M^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu(E) \geqslant 0 \ \forall E \in \mathcal{A}\}$

(1) La variación de una medida real o compleja es una medida positiva y finita: $\mu \in M(\mathcal{A}) \implies |\mu| \in M^+(\mathcal{A})$

(2) $M(\mathcal{A})$ es un espacio de Banach con la norma de la variación total: $\|\mu\| = |\mu|(\Omega) \ \ (\mu \in M(\mathcal{A})$. La convergencia es la uniforme en $\mathcal{A}$

(3) $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, con el orden natural, es también un retículo vectorial

Fijada ahora una medida σ-finita $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ consideramos dos subespacios de $M(\mathcal{A})$: $M_a(\lambda) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu \ll \lambda\}$ y $M_s(\lambda) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu \perp \lambda\}$

(4) Se verifica que $M(\mathcal{A}) = M_a(\lambda) \oplus M_s(\lambda)$, suma topológico-directa, ya que $\|\mu + \nu\| = \|\mu\| + \|\nu\|$ para cualesquiera $\mu \in M_a(\lambda)$ y $\nu \in M_s(\lambda)$

(5) Para $f \in L_1(\lambda)$ sea $T(f)$ su integral indefinida:

$$[T(f)](E) = \int_E f \, d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

Entonces T es una biyección lineal isométrica de $L_1(\lambda)$ sobre $M_a(\lambda)$. En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, T es también un isomorfismo de retículos